

## تحلیل چندمتغیره کیفیت آب زیرزمینی با استفاده از توابع مفصل ارشمیدسی (مطالعه موردی: دشت شهرکرد)

وحید بیرجندی<sup>۱</sup>، سیدحسن طباطبائی\*<sup>۲</sup>، رضا مستوری<sup>۱</sup>، حسین مظاهری<sup>۳</sup> و رسول میرعباسی نجف‌آبادی<sup>۲</sup>

۱- گروه مهندسی عمران، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

۲- گروه مهندسی آب، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

۳- گروه مهندسی شیمی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

نویسنده مسئول: [tabatabaei@sku.ac.ir](mailto:tabatabaei@sku.ac.ir)\*

نوع مقاله: پژوهشی

پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۱۰

دریافت: ۱۴۰۰/۶/۲۶

### چکیده

تاکنون مطالعات مختلفی در زمینه بررسی و مدلسازی تغییرات کیفی آب انجام شده، اما کمتر به تحلیل چندمتغیره کیفیت آب زیرزمینی پرداخته شده است. در این پژوهش، رویکردی نوین برای تحلیل چندمتغیره پارامترهای کیفی آب زیرزمینی با استفاده از توابع مفصل ارائه گردید. از آنجائی که داده‌های کیفی آب دارای چولگی بوده و پیش‌فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها معمولاً برقرار نمی‌باشد، لذا در این تحقیق، توابع مفصل ارشمیدسی برای ایجاد توزیع چندمتغیره پارامترهای کیفی آب شامل  $K^+$ ،  $Mg^{2+}$ ،  $Na^+$ ،  $Ca^{2+}$ ،  $Cl^-$ ،  $SO_4^{2-}$ ،  $HCO_3^-$ ،  $EC$ ،  $pH$  و  $TDS$  بکار گرفته شد. برای این منظور از داده‌های کیفی آب ۲۴ حلقه چاه مشاهداتی در دشت شهرکرد استفاده گردید. سپس ساختار همبستگی هر جفت پارامتر کیفی مورد بررسی قرار گرفت. پس از تعیین بهترین توزیع تک متغیره برای هر یک از پارامترهای کیفی، برازش ده تابع مفصل مختلف برای ایجاد توزیع چندمتغیره مورد آزمون قرار گرفت. نتایج حاصل از برازش توزیع‌ها نشان داد که تابع توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV) بهترین برازش را بر پارامترهای کیفی مورد مطالعه دارد. همچنین نتایج حاصل از برازش توابع مفصل نشان داد که تابع مفصل جو بهترین برازش را بر داده‌های مشاهداتی دارد و پس از آن، توابع مفصل کلایتون و فارلی-گامبل-مورگن-اشترن در رتبه‌های بعدی قرار دارند. نتایج حاصل از تحلیل همبستگی نشان داد که بالاترین میزان همبستگی بر اساس ضرایب همبستگی پیرسون، راسپیرمن و تائو کندال مربوط به جفت پارامترهای (SAR, Na) و (EC, TDS) با ضریب همبستگی بالای ۰/۹ می‌باشد. نتایج حاصل از مقایسه مفصل تئوری با مفصل تجربی، معیارهای نکوتی برازش برای آن‌ها (ریشه میانگین مربعات خطا، ضریب نش ساتکلیف، معیار اطلاعات آکائیکه و بیزین) بترتیب  $NSE = -0.0271$ ،  $RMSE = 0.031$ ،  $0.036$ ،  $AIC = 66, 65.5$  و  $BIC = -6.4, -6.9$  بدست آمد، که نتایج حاصل از این اعداد به نوبه خود حاکی از برتر بودن تابع مفصل جو در تحلیل‌های چندمتغیره کیفی آب‌های زیرزمینی می‌باشد. آگاهی از وضعیت کیفی منابع آب زیرزمینی، از جمله فواید استفاده از روش‌های تحلیل چندمتغیره در مطالعات کیفی آب‌های زیرزمینی می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** آب‌های زیرزمینی، توابع مفصل ارشمیدسی، کیفیت آب، توزیع توأم

### پیشگفتار

مانند بارندگی و رواناب، فرآیندهایی تصادفی هستند که مشخصه‌های آن‌ها ممکن است وابسته و یا مستقل از هم باشند (نیرومند و بزرگ‌نیا، ۱۳۸۱). جهت مدلسازی ساختار وابستگی بین متغیرها می‌توان از توابع مفصل<sup>۱</sup> استفاده کرد که اولین بار توسط اسکالر (۱۹۵۹) ارائه شد. این توابع اولین بار در مطالعات هیدرولوژی بوسیله دی میچله و سالوادوری (۲۰۰۳)، برای ایجاد یک مدل دومتغیره توصیف‌کننده شدت و مدت رگبار بکار برده

در ارزیابی کمی و کیفی آب‌های زیرزمینی معمولاً تعداد محدودی چاه که بیانگر اطلاعات وسیعی در آن منطقه می‌باشند و به‌طور نامنظم پراکنده شده‌اند، در فواصل زمانی معینی پایش می‌شوند. در نقاطی که چاه مشاهده‌ای وجود ندارد، از روش‌های آمار کلاسیک و زمین آماری به منظور تخمین مقادیر کمی و کیفی آب زیرزمینی استفاده می‌شود (بردوسی، ۲۰۰۶). اغلب پدیده‌های آب‌شناختی،

<sup>۱</sup>. Copula Functions

گرولر و پیسما (۲۰۱۱)، رویکرد جدیدی برای درون‌یابی به کمک تابع مفصل براساس روش ارائه شده توسط آس و همکاران (۲۰۰۹)، برای تبدیل تابع مفصل  $n$  متغیره به  $(n-1)/2$  تابع مفصل دومتغیره ارائه دادند و با استفاده از آن پهنه‌بندی عنصر روی را با دقت بالاتری نسبت به روش کریجینگ انجام دادند. این رویکرد امکان ترکیب توابع مفصل با خانواده‌های مختلف را فراهم می‌کند. بردوسی و هورنینگ (۲۰۱۶)، مدل‌سازی معکوس آب‌های زیرزمینی با استفاده از توابع مفصل گوسی و غیرگوسی و اختلاط تصادفی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها برای این کار از شبیه‌سازی مونت کارلو براساس مفهوم اختلاط تصادفی جهت بررسی وابستگی مکانی از توابع مفصل استفاده کردند. فنگ و همکاران (۲۰۲۰)، ارزیابی نقش هیدرودینامیک برای کیفیت آب‌های زیرزمینی با استفاده از تلفیق GIS<sup>۵</sup>، شاخص کیفیت آب و تکنیک‌های آماری چندمتغیره در حوضه رودخانه داگو چین مورد مطالعه قرار دادند. نتایج حاصل از این تحقیقات نشان داد که مدل زمین فضایی بخاطر عدم قطعیت معتبر یک جایگزین ارزشمند برای تجزیه و تحلیل فضایی تأثیر هیدرودینامیک آب‌های زیرزمینی بر کیفیت آب ارائه می‌دهد. چائی و همکاران (۲۰۲۰)، ویژگی‌های هیدروژئوشیمیایی و ارزیابی کیفیت آب‌های زیرزمینی بر اساس تجزیه و تحلیل آماری چندمتغیره در شهر دهوئی استان جیلین چین مورد مطالعه قرار دادند. نتایج حاصل از تحقیق ایشان نشان داد که از شرق به غرب منطقه مورد مطالعه کل مواد جامد محلول<sup>۶</sup> (TDS) به ترتیب افزایش یافته و کیفیت آب به تدریج رو به زوال می‌رود و در کل منطقه ۷۹/۲۶ درصد آب‌های زیرزمینی برای شرب مناسب است و همچنین نتایج نشان داد با وجود رودخانه‌ی ینما در مرز شرقی منطقه مورد مطالعه کیفیت آب آن عالی بوده و عمده فعالیت‌های انسانی صنعتی و کشاورزی باعث افزایش نترات منطقه شده است، همچنین افزایش آهن و منگنز در منطقه به دلیل شرایط زمین‌شناسی دشت سونگن بوده است. سیلوا و همکاران (۲۰۲۱)، ارزیابی کیفیت آب‌های زیرزمینی در حوضه نیمه‌خشک برزیل با استفاده از تلفیق GIS،

شدند. پس از آن مفهوم توابع مفصل به سرعت در زمینه‌های مختلف هیدرولوژی بکار گرفته شد که می‌توان به مطالعات زیر اشاره کرد:

گنج‌علیخانی و همکاران (۱۳۹۵) عملکرد تابع مفصل را در پهنه‌بندی کیفی آب‌های زیرزمینی دشت‌های کرمان و راور مورد ارزیابی قرار دادند. نتایج تحلیل ضریب همبستگی جفت چاه‌ها، فاصله مکانی بیش از ۱۷ کیلومتر را به عنوان فاصله مستقل نشان داد. همچنین نتایج نشان داد که روش معکوس فاصله وزنی عملکرد بهتری نسبت به روش‌های کریجینگ با تبدیل باکس-کاکس و لی کریجینگ با تبدیل لگاریتمی را دارد. بردوسی و لی (۲۰۰۸)، درون‌یابی زمین‌آمار را با استفاده از توابع مفصل مورد مطالعه قرار دادند، آن‌ها برای این منظور از توابع مفصل گوسی و غیرگوسی برای مشاهدات یک شبکه اندازه‌گیری کیفیت آب زیرزمینی در مقیاس بزرگ در بادن-وورتمبرگ آلمان برای پنج پارامتر کیفی کلراید، نترات، سولفات، pH و اکسیژن محلول استفاده کردند. نتایج حاصل از درون‌یابی مبتنی بر توابع مفصل و کریجینگ معمولی نشان داد که، مفصل‌های غیرگوسی نتایج بهتری نسبت به درون‌یابی‌های زمین‌آمار نشان داده‌اند. همچنین اعتبارسنجی فواصل اطمینان نشان داد که آن‌ها واقعی‌تر از واریانس‌های تخمینی حاصل از کریجینگ معمولی هستند. بردوسی (۲۰۱۱)، درون‌یابی پارامترهای کیفی آب‌های زیرزمینی را با استفاده از روش مفصل مکانی مورد مطالعه قرار دادند برای این منظور از توابع مفصل گوسی<sup>۲</sup>، غیرگوسی<sup>۳</sup> و مفصل وی (واین)<sup>۴</sup> استفاده نمودند. این روش بر روی سه پارامتر کیفی مختلف آب زیرزمینی یعنی کلراید، آرسنیک و دیتلاتازین در بیش از دو هزار مکان در جنوب غربی آلمان صورت گرفت. نتایج حاصل از تحقیق نشان داد که مزیت اصلی روش‌های مبتنی بر توابع مفصل در برآورد عدم قطعیت درون‌یابی است. در حالی که کریجینگ معمولی تنها با توجه به پیکربندی مکان‌های اندازه‌گیری، تنوع برآورد غیرواقعی را به همراه می‌آورد، درون‌یابی مبتنی بر مفصل فواصل اطمینان معقولی را به همراه دارد. همچنین رویکرد مبتنی بر مفصل وی فواصل اطمینان واقعی‌تری نسبت به جایگزین گوسی ارائه می‌دهد.

<sup>5</sup>. Geographic Information System

<sup>6</sup>. Total Dissolved Solid

<sup>2</sup>. Gaussian Copula

<sup>3</sup>. Non- Gaussian

<sup>4</sup>. Vine copula

گالامبوس، گامبل- هوگارد، پلاکت، فیلیپ- گامبل، جو و گامبل- بارت استفاده گردید. در مطالعات پیشین کیفیت آب کمتر به تحلیل کیفی آب‌های زیرزمینی از نقطه نظر ریاضی پرداخته شده است، لذا در این برای نخستین بار احتمالات و دوره بازگشت‌های توأم و شرطی متغیرهای کیفی آب زیرزمینی با استفاده از توابع مفصل محاسبه گردید.

## مواد و روش‌ها

### منطقه مورد مطالعه

دشت شهرکرد با وسعتی حدود ۵۵۱ کیلومتر مربع در ناحیه زاگرس بلند و استان چهارمحال و بختیاری و در عرض جغرافیایی در محدوده ۰۷° ۳۲' تا ۳۵° ۳۲' شمالی و طول جغرافیایی ۳۸° ۵۰' تا ۵۱° ۱۰' شرقی واقع شده است. از لحاظ زمین‌شناسی عموماً روی سازندهای آهکی کرتاسه (نیوکومین- سنومانین) واقع گردیده و شامل رسوبات آبرفتی قدیمی، نهشته‌های تراس‌های قدیم و رسوبات جدید مربوط به دوره کواترن است. در این مطالعه، از داده‌های ۲۴ چاه در دشت شهرکرد استفاده شده است که موقعیت جغرافیایی آن‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. آب برداشت شده از این چاه‌ها در بخش‌های شرب، صنعت و کشاورزی مصرف می‌شود (لاله‌زاری و همکاران، ۱۳۸۸). خصوصیات مهم آبخوان از جمله ضریب قابلیت انتقال و آبگذری بترتیب ۱۱۰۰ مترمربع در روز و ۱۴ متر در روز گزارش شده است (لاله‌زاری و طباطبائی، ۲۰۲۰). در این مطالعه، از برنامه نویسی در محیط نرم افزار Matlab به منظور تحلیل چندمتغیره و نرم افزار Chemistry جهت تحلیل پارامترهای کیفی آب و رسم نمودارهای کیفی و نرم افزار Easyfit جهت برازش توابع توزیع حاشیه‌ای و آزمون نیکوئی برازش استفاده شد.

### توزیع حاشیه‌ای متغیرهای کیفی

در این مطالعه، به‌منظور تعیین توزیع حاشیه‌ای مناسب برای هر پارامتر کیفی، برازش توزیع‌های نمایی، گاما، تابع معکوس گوسی، تابع معکوس گوسی سه پارامتری، توزیع پارتو، توزیع مقادیر حدی تعمیم‌یافته، توزیع پیرسون، نرمال، لوگ نرمال، لوگ پیرسون تیپ سه، ویبول، ویبول سه پارامتری، تابع گامای سه پارامتری، لوگ لجستیک

شاخص کیفیت آب و تکنیک‌های آماری چندمتغیره را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج حاصل از تحقیقشان نشان داد که، متغیرهای فسفر، نیترات، کلیرم‌های مقاوم در برابر حرارت، و کدورت از محدودیت‌های مجاز بیشتر بوده است و عمدتاً در مناطقی که تحت تأثیر منابع انسانی با شبکه فاضلاب ناکافی قرار گرفته‌اند، نیترات و کدورت رفتار فصلی مشخصی داشتند. همچنین نتایج حاصل از شاخص تبادل اطلاعات کیفی آب<sup>۷</sup> WQIR نشان داد که آب‌های آبخوان را می‌توان عمدتاً به‌صورت منظم (۱۸/۲٪) یا خوب (۸۲/۸٪) طبقه‌بندی کرد.

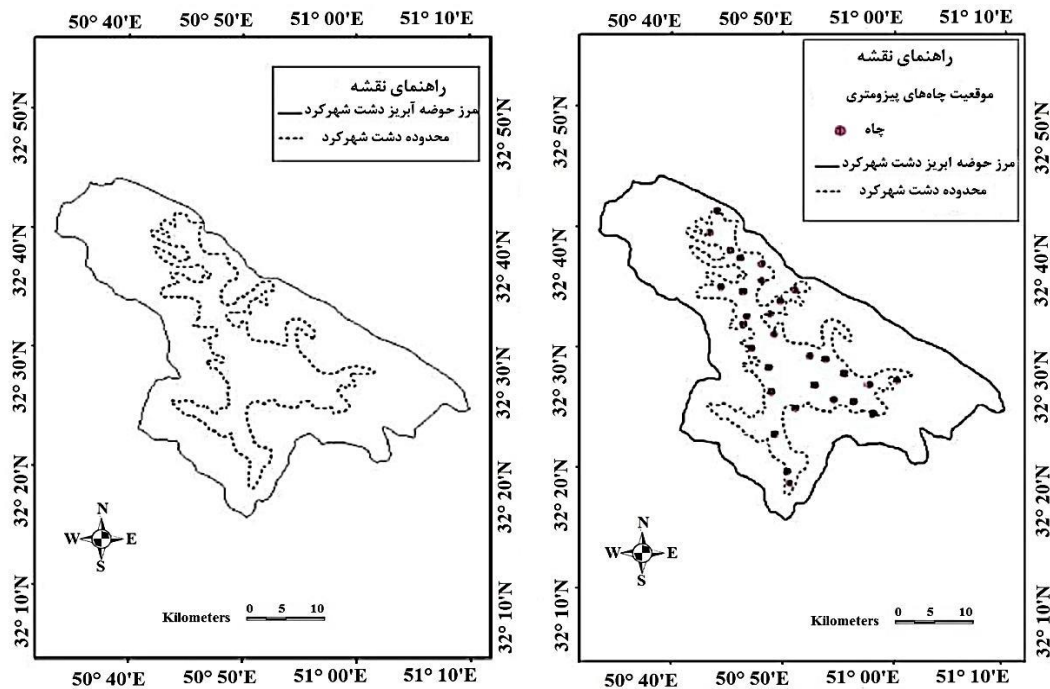
چن و همکاران (۲۰۲۰)، تحلیل چندمتغیره اثرات ژئوشیمیایی آب‌های زیرزمینی کم عمق در منطقه اصلی شهری چونگ کینگ، جنوب غربی چین مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها در این تحقیق از ۸۶ نمونه آب از سفره‌های کم عمق چونگ کینگ طی ماه‌های جولای تا سپتامبر ۲۰۱۹ جمع‌آوری کردند. نتایج حاصل از تحقیق آن‌ها نشان داد که نمونه آب‌های زیرزمینی دارای قلیائیت بوده و مقدار جامدات محلول (TDS) در آن‌ها بالا بوده است و نمونه‌های کیفیت آب منطقه در دو گروه قرار گرفته‌اند. گروه یک با کیفیت خوب تا عالی و گروه دو با کیفیت ضعیف طبقه‌بندی شده‌اند که انحلال سولفات و کلسیت از عوامل اصلی تأثیرگذار بر ویژگی‌های هیدروژئوشیمیایی آب‌های گروه دو بوده است. در زمینه توابع مفصلی تحلیل چندمتغیره مطالعاتی در زمینه‌های مختلفی صورت گرفته است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: از جمله مطالعات امیدی و محمدزاده (۲۰۱۸)، درون‌یابی مکانی برای مدلسازی داده‌های بارش با استفاده از توابع مفصل غیرگوسی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین می‌توان به مطالعات (خانی تملیه و همکاران، ۱۳۹۹؛ میرعباسی و همکاران، ۲۰۱۲؛ وانگ و همکاران، ۲۰۲۰؛ امیدی و محمدزاده، ۲۰۱۸؛ اتیکو و آتو اوکین، ۲۰۱۸؛ توسن اوغلو و همکاران، ۲۰۲۰ و ثقفیان و سنگین‌آبادی، ۲۰۲۰)، اشاره کرد.

هدف از مطالعه حاضر، ارائه روشی مبتنی بر توابع مفصل به منظور تحلیل چندمتغیره پارامترهای کیفی آب‌های زیرزمینی دشت شهرکرد در استان چهارمحال و بختیاری می‌باشد. برای این منظور از ده تابع مفصل کلایتون، علی میخائیل- حق، فارلی- گامبل- مورگن اشترن، فرلنک،

7. Water Quality Information Replacement

برتر استفاده گردید (عبدی و همکاران، ۲۰۱۷؛ آیانتوبو و همکاران، ۲۰۱۹).

تعمیم یافته، نرمال تعمیم یافته، پارتوی تعمیم یافته و گامبل مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور از آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف برای تعیین توزیع



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی جاه‌های مورد مطالعه در دشت شهرکرد (لاله‌زاری و همکاران، ۱۳۸۸).

### تابع مفصل تجربی

برای تعیین تابع مفصل برتر از بین چند تابع مفصل مورد بررسی، مقادیر احتمال توام حاصل از توابع مفصل تئوری با مقادیر احتمال تجربی مقایسه می‌گردد. تابع مفصلی که مقادیر آن به مفصل تجربی نزدیک‌تر باشد، بعنوان مفصل برتر انتخاب می‌گردد. تابع مفصل تجربی با استفاده از داده‌های مشاهده شده قابل محاسبه است (گینست و ریوست ۱۹۹۳؛ نلسن ۲۰۰۶): که در آن اندازه نمونه،  $I(A)$  متغیر نشانگر<sup>۱</sup> عبارت منطقی  $A$  می‌باشد. اگر عبارت  $A$  درست باشد، مقدار ۱ و اگر نادرست باشد مقدار صفر به خود می‌گیرد.  $X_i$  و  $Y_i$  نیز به ترتیب رتبه داده‌های مربوط به متغیرهای مورد مطالعه می‌باشد.

(۳)

$$C_e(u_i, v_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{X_i}{n+1} \leq u_i, \frac{Y_i}{n+1} \leq v_i\right)$$

### توابع مفصل

تابع مفصل در ابتدا توسط اسکالر (۱۹۵۹) به منظور ایجاد توابع توزیع توام در فضای  $[0,1]^n$  توسعه داده شد. به جای بیان توابع توزیع دو متغیره  $F$  به صورت تابعی از چندک‌ها، می‌توان آن را به صورت تابعی از حاشیه‌ها یا احتمالات تجمعی  $U_i$  و  $U_j$  در نظر گرفت. همچنین اسکالر اعلام کرد اگر  $F$  کاملاً پیوسته باشد، تابع یک‌های بصورت

$$C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

$$C(u_i, u_j) = F(F_i^{-1}(u_i), F_j^{-1}(u_j)) \quad (1)$$

تابع  $C$  را تابع مفصل گویند. تابع مفصل  $n$  متغیره به صورت معادله (۲) تعریف می‌شود:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (2)$$

در این معادله،  $C$  تابع مفصل،  $H$  یک تابع توزیع  $n$  متغیره و  $F_1$  تا  $F_n$  توابع توزیع حاشیه‌ای یک متغیره هستند (نلسن ۲۰۰۶). در جدول (۱) معادلات مربوط به چند تابع مفصل بکار گرفته شد در این مطالعه، بطور نمونه ارائه شده است.

<sup>۱</sup>. Indicator Variable

جدول ۱. نمونه‌ای از روابط توابع مفصل بکار گرفته شده در تحقیق (نلسن، ۲۰۰۶)

معادله تابع مفصل	نام تابع مفصل
$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, -1 \leq \theta \leq 1$	علی میخائیل حق
$C(u, v) = uv \exp\{[-\ln u]^{-\theta} + [-\ln v]^{-\theta}\}^{-\frac{1}{\theta}}, \theta \geq 0$	گالامبوس
$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta \geq 0$	کلابتون
$C(u, v) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}, \theta \geq 0$	پلاکت
$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \theta \neq 0$	فرانک
$C(u, v) = uv[1 + \theta(1-u)(1-v)], -1 \leq \theta \leq 1$	جو

در روابط مذکور  $\theta$ : پارامتر وابستگی تابع مفصل،  $C(u, v)$ : تابع چگالی احتمال مفصل،  $u, v$ : توزیع حاشیه‌ای متغیرها (CDF)

مفصل تجربی،  $\bar{C}_e$  میانگین مقادیر مشاهداتی احتمال به‌دست‌آمده از مفصل تجربی،  $\ln ML$  مقدار بیشینه تابع لگاریتم درست‌نمایی و  $k$  تعداد پارامترهای برازش داده شده  $C_i$  و  $C_j$  می‌باشند. تابع مفصلی مناسب‌تر می‌باشد که مقدار RMSE آن کمتر، و معیار آکائیکه (AIC) و معیار (BIC) آن به صفر و مقدار نش-ساتکلیف (NSE) آن به یک نزدیک‌تر باشد. پس از انتخاب تابع مفصل مناسب، توزیع دومتغیره مشخصه‌های کیفی ایجاد و با استفاده از آن مقادیر احتمال توأم و تجربی و دوره بازگشت‌های توأم (حالت and و or) در ادامه محاسبه گردید. شرط استفاده از توابع مفصل وجود همبستگی بین متغیرهای مورد بررسی می‌باشد. برای بررسی وجود همبستگی می‌توان از ضریب راسپیرمن (رابطه ۸)، تاو کندال (رابطه ۹) و ضریب همبستگی پیرسون (رابطه ۱۰) استفاده نمود. ضریب راسپیرمن یک ضریب ناپارامتری است و مبین درجه تطابق بین دو متغیر بوده و مانند تاو کندال در مجموعه‌ای از داده‌ها محاسبه می‌شود.  $\tau$  کندال یک ضریب همبستگی رتبه‌ای<sup>۶</sup> است که برای تعیین معیار وابستگی بین متغیرهای تصادفی و برای اندازه‌گیری درجه تطابق بین مشاهدات جفتی بکار گرفته می‌شود. براساس این ضریب مشخص می‌شود کدامیک از مشاهدات جفتی شرایط لازم جهت تحلیل چندمتغیره با استفاده از توابع مفصل را دارا هستند.

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (d_i)^2}{n(n^2 - 1)} \quad (۸)$$

### تعیین تابع مفصل برتر و ضرایب همبستگی

برای انتخاب توابع مفصل برتر جهت تحلیل دو، سه و چهار متغیره کیفیت آب زیرزمینی به ترتیب زیر عمل شد: بعد از تعیین توزیع حاشیه‌ای برتر برای هر کدام از متغیرهای کیفی، چند نوع تابع مفصل مختلف برای پیوند این دو تابع توزیع حاشیه‌ای در نظر گرفته و پارامتر تابع مفصل با روش توابع منطقی برای حاشیه‌ها<sup>۱</sup> (IFM) که توسط جو (۱۹۹۷) پیشنهاد شده است، برآورد گردید. بر اساس مطالعاتی که توسط آیانتوبو و همکاران (۲۰۱۸) و انجام گرفت، جهت تعیین توابع مفصل برتر علاوه بر روش حداکثر درست‌نمایی از معیار آکائیکه<sup>۲</sup> (AIC) رابطه (۴) (آکائیکه، ۱۹۷۴)، نش-ساتکلیف<sup>۳</sup> (NSE) رابطه (۵) (نش و ساتکلیف، ۱۹۷۰)، ریشه میانگین مربعات خطا<sup>۴</sup> (RMSE) رابطه (۶) و معیار اطلاعات بیزین<sup>۵</sup> (BIC) رابطه (۷) (شوارز، ۱۹۷۸) استفاده شد (آیانتوبو و همکاران، ۲۰۱۸ و ۲۰۱۹).

$$AIC = -2 \ln ML + 2k \quad (۴)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_{pi} - C_{ei})^2}{\sum_{i=1}^n (C_{ei} - \bar{C}_e)^2} \quad (۵)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [C_{pi} - C_{ei}]^2} \quad (۶)$$

$$BIC = k \ln(n) - 2 * \ln(\hat{L}) \quad (۷)$$

که در آن‌ها،  $n$  تعداد نمونه،  $C_p$  مقادیر محاسبه‌شده مفصل پارامتری،  $C_e$  مقادیر مشاهداتی احتمال به‌دست‌آمده از

<sup>۴</sup>. Root mean square error

<sup>۵</sup>. Bayesian information criterion

<sup>۶</sup>. Rank correlation coefficient

<sup>۱</sup>. Inference Functions for Margins

<sup>۲</sup>. Akaike information criterion

<sup>۳</sup>. Nash-Sutcliffe efficiency coefficient

وابسته با استفاده از توابع مفصل، می‌توان از احتمال تجاوز عطفی و یا فصلی استفاده کرد. بر همین اساس دو دوره بازگشت عطفی و فصلی داریم که روابط آن‌ها بصورت (۱۳) و (۱۴) می‌باشد:

$$T_{XY} = \frac{\mu_T}{P(X > x \text{ and } Y > y)} \quad (13)$$

$$= \frac{\mu_T}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y))}$$

$$T_{XY} = \frac{\mu_T}{P(X > x \text{ or } Y > y)} \quad (14)$$

$$= \frac{\mu_T}{1 - C(F_X(x), F_Y(y))}$$

که در آن،  $\mu_T$  متوسط زمان بین مشاهده یکسان متوالی بر حسب سال است که برای داده‌های بیشینه سالانه، مقدار آن برابر یک سال است یا عبارتی برای مطالعاتی به غیر از مطالعات خشکسالی آن را ۱ در نظر می‌گیرند.  $T_{XY}$  دوره بازگشت توأمی است که در آن جفت مشاهده شده هم از  $x$  و هم از  $y$  تجاوز نموده باشد (یعنی،  $X > x$  و  $Y > y$ ) (ریکونا و همکاران ۲۰۱۳؛ شیائو ۲۰۰۶).

## نتایج و بحث

### تعیین تابع توزیع حاشیه‌ای

به‌منظور ایجاد تابع مفصل جهت تحلیل دومتغیره پارامترهای کیفی ( $K^+$ ،  $Mg^{2+}$ ،  $Na^+$ ،  $Ca^{2+}$ ،  $Cl^-$ ،  $SO_4^{2-}$ ،  $HCO_3^-$ ، SAR، EC، pH، TDS و TH) در ابتدا لازم است که تابع توزیع حاشیه‌ای برتر برای هر کدام از متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی تعیین شود. در این مطالعه، برازش تعدادی از توزیع‌های رایج در تحلیل‌های منابع آب، شامل توزیع‌های نمایی، گاما، بتا، تابع معکوس گوسی، تابع معکوس گوسی سه پارامتری، توزیع پارتو، توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته، توزیع پیرسون، نرمال، لوگ نرمال، لوگ پیرسون تیپ سه، ویبول، ویبول سه پارامتری، تابع گامای سه پارامتری، لوگ لجستیک تعمیم یافته، نرمال تعمیم یافته، پارتوی تعمیم یافته و گامبل با استفاده از آزمون اندرسون-دارلینگ در سطح معنی‌داری ۵ درصد بررسی شد. همانطور که از نتایج حاصل از برازش توزیع‌ها در جدول (۲) استنباط می‌شود تابع توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته<sup>۷</sup> (GEV) بهترین برازش را بر پارامترهای کیفی مورد مطالعه دارد. که در ادامه مقادیر پارامترهای

$$\hat{\tau} = \left( \frac{n}{2} \right)^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sgn}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \quad (9)$$

$$\text{sgn}(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \psi > 0 \\ 0 & \text{if } \psi = 0 \\ -1 & \text{if } \psi < 0 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{\frac{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (10)$$

محدوده ضریب  $\tau$  کندال در بازه  $[-1, 1]$  می‌باشد که ۱ همگامی کامل بین دو متغیر، ۰-ناهمگامی کامل و مقدار صفر، همگامی صفر را بیان می‌کنند. در روابط فوق  $n$  تعداد نمونه،  $x_i$  مقادیر محاسبه شده مفصل پارامتری،  $y_i$  مقادیر مشاهداتی احتمالی بدست آمده از مفصل تجربی و  $\bar{x}$  میانگین مقادیر مشاهداتی احتمالی بدست آمده از مفصل تجربی، و  $d_i$  اختلاف بین رتبه‌های  $x_i$  و  $y_i$  می‌باشد (نلسن ۲۰۰۶).

### احتمال شرطی توأم و دوره بازگشت‌ها

احتمالات شرطی دومتغیره را نیز می‌توان به سادگی بر اساس توابع مفصل تعریف نمود. بدین صورت که اگر هدف بررسی احتمال وقوع یک متغیر در حالت فرضی تجاوز متغیر دیگر از آستانه خاصی باشد، می‌توان با روابط احتمالات شرطی مقدار آن را محاسبه نمود (شیائو، ۲۰۰۶). در تحلیل کیفی، احتمال شرطی توزیع غلظت یک متغیر کیفی (به عنوان مثال EC را با  $x$  یا SAR را با  $y$  نشان دهیم) یا سایر متغیرهای مورد نظر در حالتی که از یک حد آستانه معین،  $x'$ ، تجاوز کند از رابطه (۱۱) بدست می‌آید. همچنین احتمال شرطی توزیع میزان EC برای زمانیکه مثلاً SAR از یک حد آستانه معین،  $y'$ ، تجاوز کند، از رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود (شیائو ۲۰۰۶).

$$P(Y \leq y | X \geq x') = \frac{F_Y(y) - C(F_X(x'), F_Y(y))}{1 - F_X(x')} \quad (11)$$

$$P(X \leq x | Y \geq y') = \frac{F_X(x) - C(F_X(x), F_Y(y'))}{1 - F_Y(y')} \quad (12)$$

تحلیل فراوانی دومتغیره در مورد دو متغیر تصادفی همبسته، به وسیله دوره بازگشت توأم تعریف می‌گردد. برای به دست آوردن دوره بازگشت‌های توأم دومتغیر

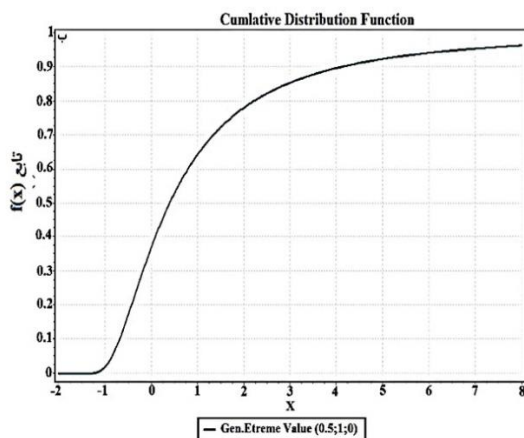
7. Generalized extreme value

گامبل - هوگارد، پلاکت، فیلیپ - گامبل، جوئی و گامبل - بارنت مورد بررسی قرار گرفت. توابع توزیع تجمعی در تحلیل چندمتغیره جهت محاسبات مربوط به دوره بازگشت‌ها (شرطی و توأم)، احتمالات (شرطی و توأم) کاربرد دارند. در ادامه جهت شناخت از شرایط کیفی منطقه مورد مطالعه کلاس‌بندی کیفی تمام چاه‌های با استفاده از طبقه‌بندی ویلکوکس مورد مطالعه قرار گرفت که همه آن‌ها در کلاس کیفی (C2-S1) قرار گرفتند. هدایت الکتریکی این دسته از آب‌ها بین ۲۵۰ تا ۷۵۰ میکروموس بر سانتی‌متر بوده و نسبت جذب سدیم از مقدار ناچیز تا ۱۰ متغیر می‌باشد. منابع آب مورد مطالعه در منطقه در این گروه قرار گرفتند. این گروه از نظر کشاورزی تقریباً فاقد محدودیت هستند. و در کلاس آب‌های خوب قرار دارند شکل (۳).

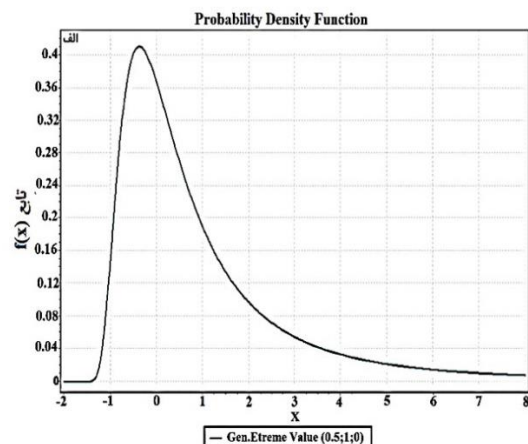
تابع توزیع GEV برای متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی که با روش حداکثر درست‌نمایی تخمین زده شده‌اند، در جدول (۲) ارائه شده است. همچنین در شکل (۲) توابع چگالی احتمال (۲-الف) و توزیع تجمعی (۲-ب) برای پارامتر کیفی (TDS) به‌عنوان نمونه (در چاه شماره ۵) نشان داده شده است (لازم به ذکر با توجه حجم بالای محاسبات و محدودیت صفحات از ذکر توضیحات تمامی چاه‌های مورد مطالعه صرف نظر گردید و به مطالب مهم اشاره گردید) که نتایج حاصل از تعیین توزیع برتر جهت تحلیل چندمتغیره با استفاده از توابع مفصل از ملزومات اساسی به‌شمار می‌آید. بعد از انتخاب توزیع حاشیه‌ای برتر، به منظور ایجاد تابع توزیع تجمعی (CDF) دومتغیره، برازش ده تابع مفصل، شامل کلایتون، علی - میخائیل - حق، فارلی - گامبل - مورگن اشترن، فرلنک، گلامبوس،

جدول ۲. مقادیر پارامترهای توزیع مقادیر حدی تعمیم‌یافته (GEV) براساس آزمون اندرسون - دارلینگ (چاه شماره ۵)

متغیر کیفی	K	$\sigma$	$\mu$	P
K <sup>+</sup>	-۰/۳۰۹	۰/۰۰۶	۰/۰۱۶	۰/۳۱
Na <sup>+</sup>	۰/۱۳۶	۰/۰۴۱	۰/۱۵۱	۰/۱۲
Mg <sup>2+</sup>	۰/۰۹	۰/۱۴۳	۱/۱۲۷	۰/۰۸
Ca <sup>2+</sup>	-۰/۰۰۳	۰/۱۸۳	۰/۱۶۸	۰/۱۶
pH	-۰/۱۲۰	۰/۱۳۴	۷/۸۱	۰/۱۵
EC	-۰/۰۹۶	۱۷/۰۸	۳۴۵	۰/۰۸
TDS	-۰/۰۸۷	۱۱/۱۷	۲۲۴/۲۳	۰/۰۸
TH	۰/۰۲۵	۸/۲۹	۱۶۹/۹۳	۰/۱۴
SAR	۰/۱۰۸	۰/۰۳۰	۰/۱۱۵	۰/۱۰
SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	۰/۱۶۷	۰/۰۸۶	۰/۱۵۴	۰/۱۳
Cl <sup>-</sup>	۰/۳۵۵	۰/۰۴۸	۰/۲۱۸	۰/۱۹
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	-۰/۱۳۹	۰/۱۹۶	۳/۰۷	۰/۰۸

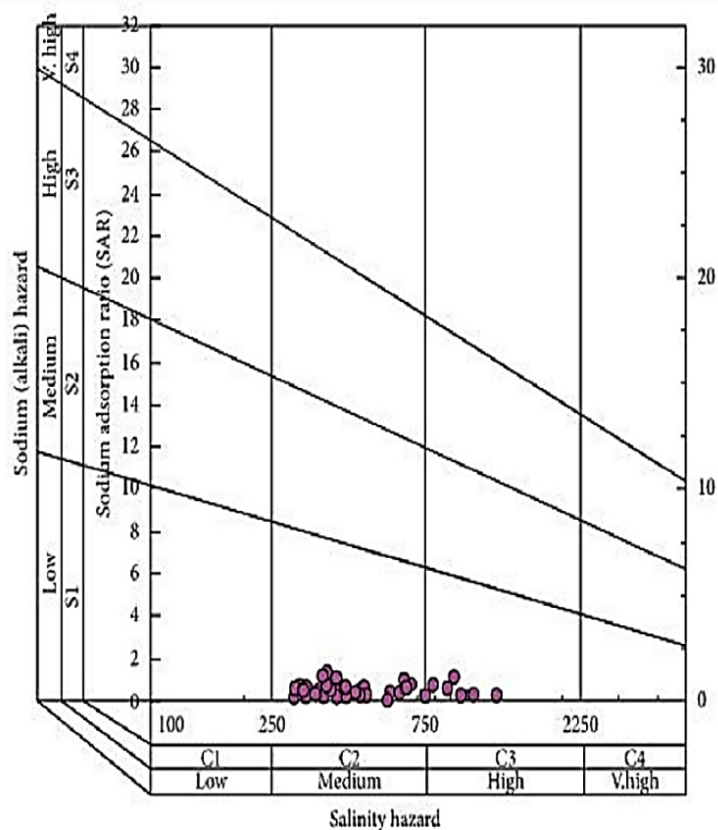


تابع توزیع حاشیه‌ای CDF توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته



تابع چگالی احتمال PDF توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته

شکل ۲. تابع چگالی احتمال توزیع (الف) و توزیع تجمعی (ب) مقادیر حدی تعمیم یافته برای متغیر SAR (چاه شماره ۵)



شکل ۳. طبقه‌بندی کیفی نمونه‌های مورد مطالعه براساس دیاگرام ویلکوکس

### معیارهای همبستگی و آزمون نکوئی برازش

ضرایب همبستگی پیرسون، راسپیرمن و تاو کندال برای ۲۴ چاه بررسی گردید و نتایج چاه شماره ۵ برای نمونه در جدول ۳ ارائه گردید. مقادیر ضریب تاو کندال بین متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی چاه شماره ۵ بصورت دو به دو در قالب ماتریس همبستگی در جدول (۳) ارائه شده است. همانگونه که در جدول (۳) مشاهده می‌شود بیشترین میزان ضریب تاو کندال مربوط به جفت متغیر TDS و EC و با ضریب تاو کندال ۰/۹۳۶ و کمترین آن مربوط به جفت متغیر  $Na^+$  و  $Mg^{2+}$  با ضریب تاو کندال ۰/۲۰۱ می‌باشد. در ادامه برازش ده تابع مفصل مختلف (شامل کلایتون، علی-میخائیل-حق، فارلی-گامبل-مورگن اشترن، فرانک، گلامبوس، گامبل-هوگارد، پلاکت، فیلیپ-گامبل، جوئی و گامبل-بارنت) را برای ایجاد توزیع دومتغیره بین جفت متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی مورد ارزیابی قرار گرفت که نتایج مربوط به چاه شماره ۵ برای نمونه در جدول (۴) ارائه شده است. در جدول ۴ مقادیر ضریب همبستگی پیرسون، ضریب راو

اسپیرمن، مقدار تابع حداکثر درست‌نمایی، مقدار پارامتر وابستگی مفصل منتخب و معیارهای انتخاب مفصل منتخب برای هر جفت متغیر کیفیت آب زیرزمینی چاه شماره ۵ ارائه شده است. همانطور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، بالاترین ضرایب همبستگی پیرسون مربوط به جفت متغیرهای کیفی TDS-EC، Na-SAR، EC-TH، TDS-TH و  $HCO_3^-$ -TH می‌باشد. همچنین از معیارهای نکوئی برازش شامل معیار اطلاعات آکائیکه (AIC)، ضریب کارایی نش-ساتکلیف (NSE)، معیار اطلاعات بیزین (BIC) و ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برای تعیین تابع مفصل برای هر جفت متغیر کیفیت آب زیرزمینی استفاده گردید. براین اساس هر تابعی که حداکثر درست‌نمایی بیشتر داشته باشد به‌عنوان تابع مفصل برتر جهت تحلیل چندمتغیره شناخته می‌شود. در جدول (۵) توابع مفصل برتر برای تمامی چاه‌های مورد مطالعه در تحقیق ارائه شده است. براساس نتایج بدست آمده برای تمامی جفت متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی، توابع مفصل جو، فارلی-گامبل-مورگن



اشترن، کلایتون و علی - میخائیل - حق بیش‌ترین فراوانی را بعنوان تابع مفصل برتر را برای اکثریت چاه‌ها را داشته‌اند. در این مطالعه به دلیل محدودیت حجم مقاله، فقط نتایج مربوط به چاه شماره ۵ ارائه می‌گردد. در چاه شماره ۵ تابع مفصل جو به‌عنوان تابع مفصل برتر شناخته شده است و تابع مفصل کلایتون در رتبه بعدی قرار دارد.

اشترن، کلایتون و علی - میخائیل - حق بیش‌ترین فراوانی را بعنوان تابع مفصل برتر را برای اکثریت چاه‌ها را داشته‌اند. در این مطالعه به دلیل محدودیت حجم مقاله، فقط نتایج مربوط به چاه شماره ۵ ارائه می‌گردد. در چاه شماره ۵ تابع مفصل جو به‌عنوان تابع مفصل برتر شناخته شده است و تابع مفصل کلایتون در رتبه بعدی قرار دارد.

جدول ۳. ماتریس همبستگی تاو کندال متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی چاه شماره ۵

	Ca <sup>2+</sup>	Cl <sup>-</sup>	EC	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	K <sup>+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	Na <sup>+</sup>	pH	SAR	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	TDS	TH
Ca <sup>2+</sup>	*											
Cl <sup>-</sup>	-۰/۲۱	*										
EC	۰/۲۲	۰/۰۰۸	*									
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	۰/۲۱	-۰/۲۲	۰/۴۴	*								
K <sup>+</sup>	-۰/۰۵	-۰/۰۴	-۰/۱۸	-۰/۱۲	*							
Mg <sup>2+</sup>	-۰/۳۷	۰/۱۷	۰/۲۳	۰/۱۱	-۰/۱۴	*						
Na <sup>+</sup>	۰/۰۶	۰/۰۱	۰/۳۲	۰/۲۵	-۰/۳۲	۰/۲۰	*					
pH	۰/۰۹	-۰/۰۶	۰/۰۹۸	۰/۰۹	۰/۱۲	۰/۰۹	۰/۰۳	*				
SAR	۰/۰۳	۰/۰۱۸	۰/۳۰	۰/۲۱	-۰/۳۲	۰/۱۹	۰/۹۲	۰/۰۰۹	*			
SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	۰/۴۹	-۰/۱۳	۰/۲۶	-۰/۲۵	-۰/۲۰	-۰/۰۴	۰/۲۳	۰/۲۰	۰/۲۰	*		
TDS	۰/۲۰	۰/۰۱۸	۰/۹۶	۰/۴۴	-۰/۱۸	۰/۲۲	۰/۳۲	۰/۰۳۴	۰/۳۰	۰/۲۵	*	
TH	۰/۳۳	-۰/۰۳	۰/۵۴	۰/۵۶	-۰/۲۳	۰/۲۳	۰/۳۳	۰/۱۹	۰/۲۶	۰/۲۴	۰/۵۳	*

\* واحد پارامترهای کیفی ذکر شده در جدول و متن مقاله میلی‌گرم بر لیتر یا ppm می‌باشد.

جدول ۴. ضرایب همبستگی، معیارهای نکوئی و پارامتر مفصل برتر برازش داده شده بر برای جفت متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی چاه شماره ۵

تابع مفصل برتر	BIC	AIC	NSE	*RMSE	θ	ML	Spearman-ρ	R	پارامتر کیفی
علی - میخائیل - حق	-۶/۴	۶۶	-۰/۲۷۱	۰/۰۳۱	۰/۹۹۹	۱۴۸/۱	۰/۹۸۱	۰/۹۹۷	SAR, Na <sup>+</sup>
جو	-۳/۷	۶۸/۷	-۰/۱۱۸	۰/۰۲۶	۱	۳۸/۹	۰/۴۳۰	۰/۴۶۹	SAR, EC
جو	-۲/۶	۶۹/۷	-۰/۱۳۸	۰/۰۲۶	۱	۲۲/۸	۰/۴۲۴	۰/۴۷۵	SAR, TDS
کلایتون	-۴/۹	۶۷/۴	-۰/۰۶۴	۰/۰۴۱	۰/۲۶۰	۷۳/۷	۰/۲۹۰	۰/۳۱۳	SAR, HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>
جو	-۱/۹	۷۰/۵	-۰/۰۷۲	۰/۰۲۷	۱	۱۵/۷۵	۰/۴۰۰	۰/۳۷۶	SAR, TH
کلایتون	-۵/۶	۶۶/۷	-۰/۱۶۸	۰/۰۲۷	۰/۱۰۸	۹۹/۹	۰/۳۲۲	۰/۵۶۸	SAR, SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
جو	-۴/۲	۶۸/۲	-۰/۱۱۲	۰/۰۲۸	۱	۵۰/۳	۰/۴۶۱	۰/۵۲۱	Na <sup>+</sup> , Mg <sup>2+</sup>
جو	-۳/۴	۶۸/۹	-۰/۰۷۵	۰/۰۲۸	۱	۳۴/۳	۰/۴۵۳	۰/۵۲۵	Na <sup>+</sup> , TDS
کلایتون	-۴/۶	۶۷/۷	-۰/۰۲۵	۰/۰۲۷	۰/۱۰۸	۶۲/۱	۰/۳۴۳	۰/۳۶۵	Na <sup>+</sup> , HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>
جو	-۲/۹	۶۹/۴	-۰/۰۷۵	۰/۰۲۸	۱	۲۶/۹	۰/۴۶۶	۰/۴۴۶	Na <sup>+</sup> , TH
کلایتون	-۵/۳	۶۷/۱	-۰/۱۶۱	۰/۰۲۷	۰/۱۴۷	۸۸/۳	۰/۳۴۳	۰/۵۹۸	Na <sup>+</sup> , SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
جو	-۵/۶	۶۶/۸	-۰/۰۹۶	۰/۰۲۴	۱	۱۰۰/۱	۰/۳۷۱	۰/۲۹۰	Mg, EC
جو	-۵/۲	۶۷/۱	-۰/۰۲۰	۰/۰۲۴	۱	۸۴/۱	۰/۳۷۱	۰/۲۱	Mg <sup>2+</sup> , TDS
جو	-۴/۹	۶۷/۳	-۰/۰۱۳	۰/۰۲۶	۱	۷۴/۳	۰/۳۳۰	۰/۳۶۱	Mg <sup>2+</sup> , TH
جو	-۵/۶	۶۶/۷	-۰/۰۰۴	۰/۰۲۹	۱	۱۰۳/۵	۰/۳۵۱	۰/۵۵۹	Ca <sup>2+</sup> , EC
علی - میخائیل - حق	-۱/۱	۷۱/۳	-۰/۱۵۲	۰/۰۲۹	۰/۶۸۴	۱۰/۵	۰/۴۶۱	۰/۴۴۴	Ca <sup>2+</sup> , HCO <sub>3</sub>
جو	-۵/۱	۶۷/۲	-۰/۰۲۳	۰/۰۲۸	۱	۷۹/۴	۰/۵۴۹	۰/۵۸۴	Ca <sup>2+</sup> , TH
کلایتون	-۳/۴	۶۸/۹	-۰/۰۴۹	۰/۰۲۹	۰/۲۱۲	۳۴/۶	۰/۳۲۳	۰/۴۱۴	Ca <sup>2+</sup> , SO <sub>4</sub>
جو	-۵/۳	۶۷/۱	-۰/۰۰۹	۰/۰۲۹	۱	۸۷/۷	۰/۳۳۷	۰/۵۵۱	Ca <sup>2+</sup> , TDS
جو	-۶/۹	۶۵/۵	-۰/۰۳۵۳	۰/۰۳۶	۱۹/۹۹۹	۱۹۵/۳	۰/۹۹۸	۰/۹۹۹	EC, TDS
جو	-۵/۶	۶۶/۷	-۰/۰۱۸۲	۰/۰۳۱	۱	۱۰۳/۸	۰/۵۹۳	۰/۵۹۵	EC, HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>
جو	-۷/۴	۶۴/۹	-۰/۰۱۹۷	۰/۰۳۳	۱	۲۴۶/۹	۰/۷۱۰	۰/۸۱۰	EC, TH
جو	-۵/۱	۶۷/۳	-۰/۰۵۲	۰/۰۳۰	۱	۷۸/۳	۰/۳۷۵	۰/۵۵۰	EC, SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
جو	-۵/۳	۶۷/۱	-۰/۰۱۸۹	۰/۰۳۲	۱	۸۷/۹	۰/۵۷۳	۰/۵۷۵	TDS, HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>
جو	-۷/۳	۶۵/۱	-۰/۰۱۴۸	۰/۰۳۲	۱	۲۳۱/۱	۰/۶۹۳	۰/۷۹۵	TDS, TH
جو	-۴/۶	۶۷/۷	-۰/۰۹۵	۰/۰۳۰	۱	۶۲/۳	۰/۳۶۶	۰/۵۵۰	TDS, SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
جو	-۵/۱	۶۷/۳	-۰/۰۳۳۰	۰/۰۳۲	۱	۷۹/۳	۰/۷۵۱	۰/۷۲۴	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup> , TH
جو	-۴/۳	۶۸/۱	-۰/۰۴۶	۰/۰۳۰	۱	۵۳/۹	۰/۳۸۱	۰/۵۷۰	TH, SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>

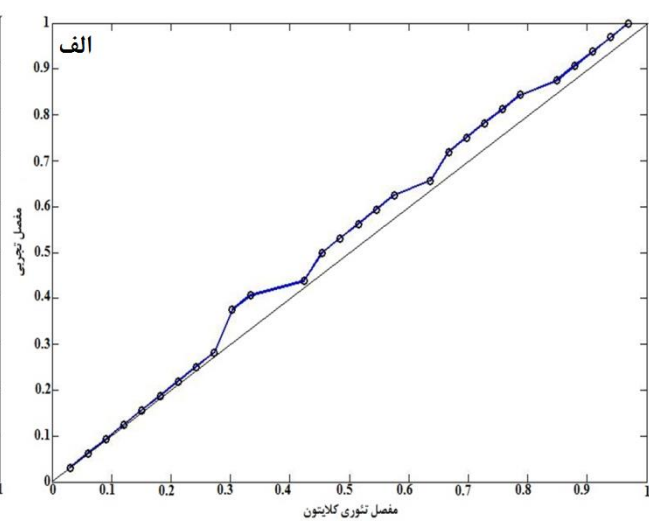
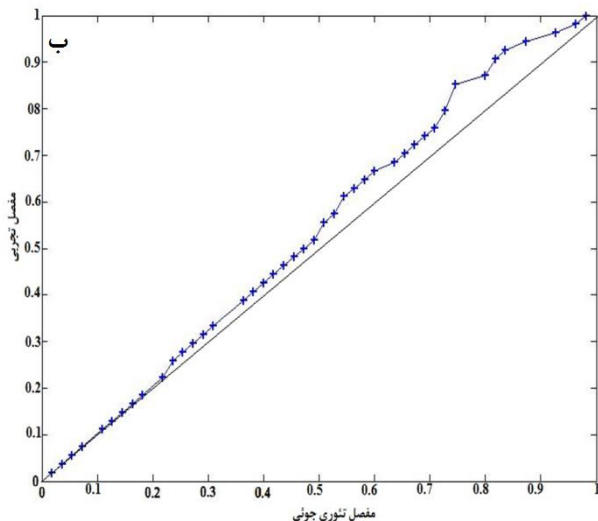
\* واحد پارامترهای کیفی ذکر شده در جدول و متن مقاله میلی‌گرم بر لیتر یا ppm می‌باشد.

مشاهده می‌شود، اغلب داده‌ها به نیمساز زاویه ۴۵ درجه نزدیک است، هرچند بنظر می‌رسد مفصل‌های تئوری در برخی نقاط دچار کم برآوردی<sup>۱</sup> شده‌اند.

در شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) تابع مفصل تجربی در برابر تابع مفصل تئوری براساس توابع مفصل کلایتون و جوئی برای جفت متغیر SAR و Na در چاه شماره ۵ نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل‌ها

جدول ۵. توابع مفصل برتر در ایجاد توزیع توام متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی در چاه‌های مورد مطالعه در دشت شهرکرد

شماره چاه	توابع مفصل برتر	شماره چاه	توابع مفصل برتر
۱	جو، فارلی گامبل مورگن اشترن	۱۳	فارلی - گامبل - مورگن اشترن
۲	جو	۱۴	جو، فارلی - گامبل - مورگن اشترن
۳	جو، کلایتون	۱۵	فارلی - گامبل - مورگن اشترن، جو
۴	جو، کلایتون	۱۶	فارلی - گامبل - مورگن اشترن
۵	جو، کلایتون	۱۷	فارلی - گامبل - مورگن اشترن
۶	جو، کلایتون	۱۸	فارلی - گامبل - مورگن اشترن، جو
۷	جو، گالامبوس	۱۹	فارلی - گامبل - مورگن اشترن، گامبل بارت
۸	جو	۲۰	جو
۹	جو، کلایتون	۲۱	فارلی - گامبل - مورگن اشترن
۱۰	جو	۲۲	جو، فارلی - گامبل - مورگن اشترن
۱۱	کلایتون، فارلی گامبل مورگن اشترن	۲۳	جو، کلایتون
۱۲	جو، علی میخائیل حق	۲۴	جو، فارلی - گامبل - مورگن اشترن



شکل ۴. نمودار مفصل کلایتون (الف) جو (ب) در برابر مفصل تجربی برای داده‌های SAR و Na در چاه شماره ۵

طبقه‌بندی آب از نظر کشاورزی، شوری و مقدار سدیم موجود در آن می‌باشد (علیزاده، ۱۳۹۱)، لذا بررسی این دو عامل نه تنها بر رشد گیاه مؤثر می‌باشد، بلکه در درجه تناسب آب از نظر آبیاری و تأثیر آن بر نفوذپذیری خاک و نیز برای طبقه‌بندی آب‌ها از لحاظ شرب و کشاورزی حائز اهمیت می‌باشد. بعنوان مثال در شکل (۵-الف) نمودارهای احتمال وقوع مقادیر مختلف SAR بشرط وقوع غلظت مشخص Na در حالت سه بعدی ارائه شده است.

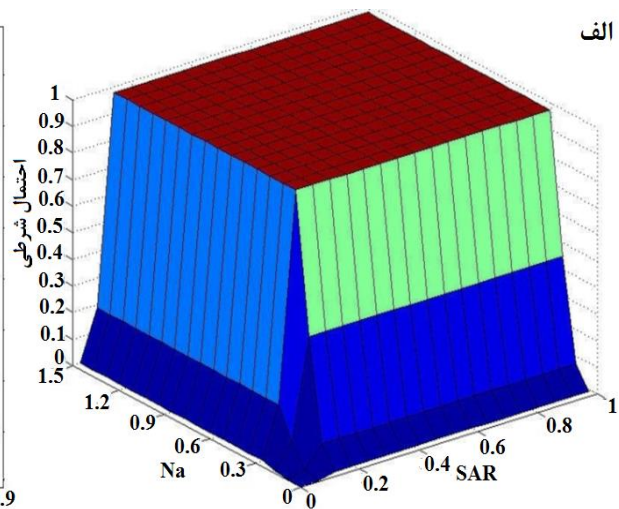
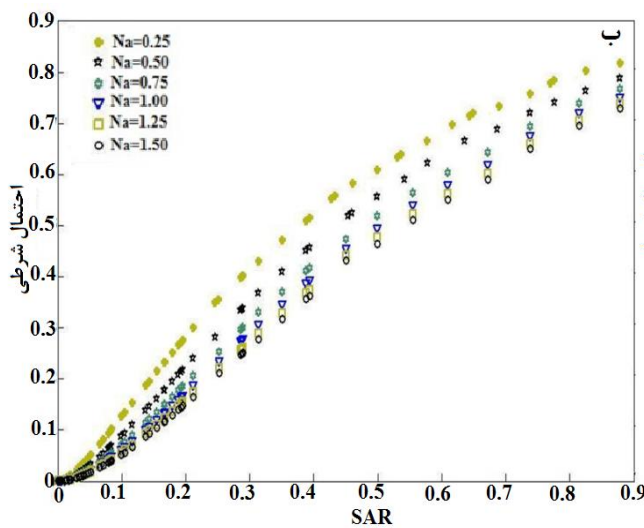
### احتمال شرطی

یکی از مفاهیم کاربردی که می‌توان از توابع مفصل استخراج نمود، احتمال شرطی است. برای این منظور با در نظر گرفتن دو به دو متغیرهای کیفی در چاه‌های دشت شهرکرد، دوره بازگشت شرطی آن‌ها محاسبه و بررسی شد که در این مقلله نتایج مربوط به احتمال شرطی برای دو متغیر کیفی SAR و Na برای نمونه ارائه شده است. از آنجائی که مهم‌ترین معیارهای کیفی در

<sup>1</sup> under estimation

منطقه به سمت شوری و کیفیت نامرغوب سوق داده شده است، با استفاده از احتمالات شرطی می‌توان شرایط حاد را بررسی نمود و در آن شرایط سطح زیر کشت کشاورزی را به گیاهان مقاوم به شوری تغییر داد و یا اینکه راهکارهای مدیریتی جهت کاهش شوری و تخریب اراضی کشاورزی منطقه مورد نظر اتخاذ نمود که این موضوع از جمله جنبه‌های کاربردی احتمالات شرطی در حیطه تحلیل‌های کیفی آب‌های زیرزمینی می‌باشد.

همانطور که در شکل (۵-ب) مشاهده می‌شود، اگر غلظت Na برابر ۰/۲۵ باشد، احتمال اینکه مقدار SAR برابر ۰/۲ باشد، برابر ۰/۲۸ می‌باشد. با استفاده از این شکل می‌توان برای مقادیر مختلف غلظت Na، میزان SAR را با احتمالات مختلف تخمین زد. با آگاهی از میزان سدیم و نسبت جذبی آن مهندسان آب و کارشناسان کشاورزی می‌توانند الگوی کشت و روش آبیاری مناسب را انتخاب کنند. به‌عنوان مثال اگر در منطقه‌ای بدلیل عدم رعایت پروتکل‌های زیست‌محیطی و کشاورزی در دراز مدت آب



شکل ۵. الف) نمودار سه‌بعدی احتمال شرطی مقدار SAR برای مقادیر مختلف غلظت یون Na و ب) احتمال شرطی مقدار SAR برای مقادیر مختلف غلظت یون Na در چاه شماره ۵

برابر ۰/۱۶ یا بیشتر و میزان نسبت جذبی سدیم (SAR) برابر با ۰/۲۵ باشد، دوره بازگشت برابر ۳ سال می‌باشد، ولی در حالت and برای مقادیر مذکور دوره بازگشت توأم برابر ۵۰ ساله خواهد بود (شکل ۶-الف). مشابه این نتایج برای جفت متغیرهای کیفی دیگر نیز قابل ارائه می‌باشد.

#### دوره بازگشت شرطی

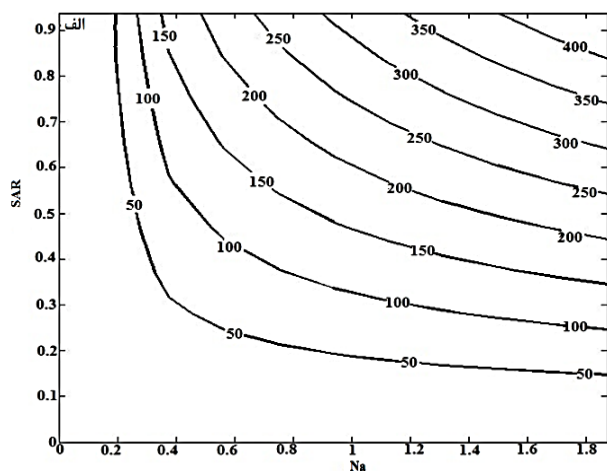
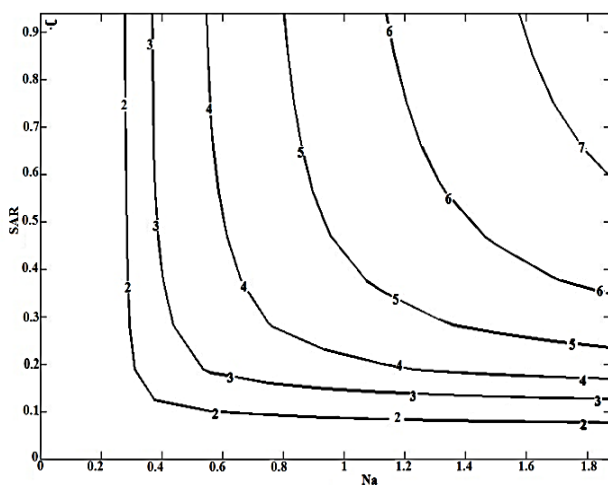
یکی دیگر از مفاهیم کاربردی در تحلیل چندمتغیره مطالعات هیدرولوژی و منابع آب دوره‌های بازگشت شرطی می‌باشد. بر اساس توابع مفصل برای هر دو متغیر کیفی می‌توان دوره بازگشت شرطی را محاسبه نمود که در این مقاله نتایج مربوط به دو متغیر کیفی SAR و Na برای چاه شماره ۵ بعنوان نمونه ارائه شده است. در حالت اول دوره بازگشت میزان سدیم برای حالتی که نسبت جذبی سدیم از یک حد آستانه معین تجاوز کند

#### دوره بازگشت توأم

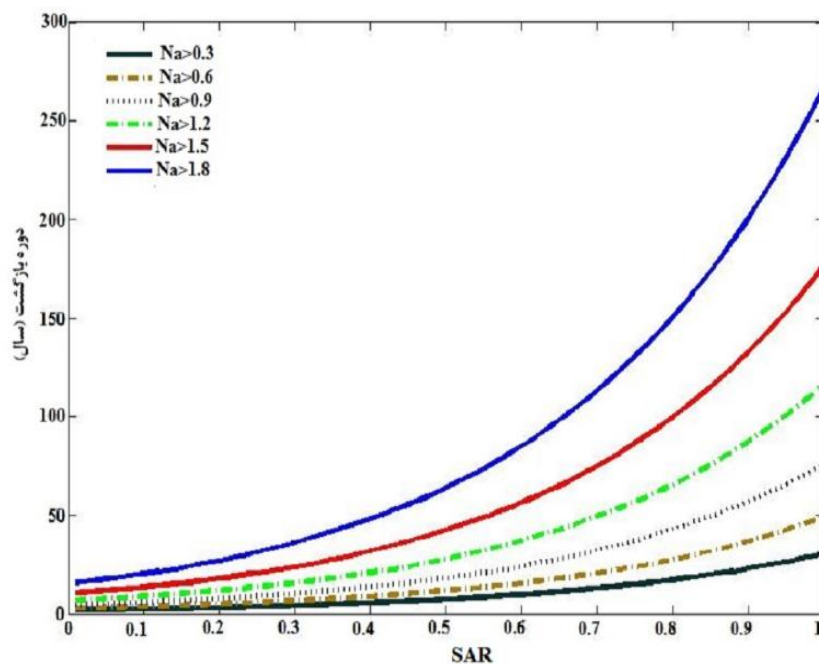
در این مطالعه، جهت محاسبه دوره بازگشت توأم، پس از تعیین توابع توزیع حاشیه‌ای (CDF) متغیرهای کیفی آب‌های زیرزمینی در ۲۴ چاه مورد بررسی در دشت شهرکرد و انتخاب تابع مفصل برتر برای ایجاد توزیع دو متغیره، دوره بازگشت دو متغیره در دو حالت (and) «و» و (or) «یا» محاسبه و منحنی‌های کنتور آن‌ها برای چاه شماره ۵ بترتیب در شکل‌های (۶-الف) و (۶-ب) ارائه شده است. برای پروژه‌هایی که کوتاه مدت (کوچک‌تر) و از اهمیت کمتری برخوردارند، معمولاً دوره بازگشت حالت OR در نظر گرفته می‌شود، اما در پروژه‌هایی که از اهمیت بیشتری برخوردار باشند (مثلاً از آب زیرزمینی برای مصارف شرب استفاده می‌شود)، از دوره بازگشت در حالت and برای طراحی‌ها استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، در شکل (۶-ب) (حالت or) در زمانی که غلظت سدیم (Na)

بتوانند برنامه‌ریزی مناسبی جهت مدیریت اراضی کشاورزی و آبیاری آن‌ها تدوین کنند. بعنوان مثال، برای طراحی یک پروژه بهره‌برداری از منابع آب زیرزمینی برای مقاصد مختلف شرب، صنعت و کشاورزی، با توجه به عمر مفید طرح می‌توان با ایجاد توزیع دومتغیره بین متغیرهای کیفی مورد نظر، با فرض تغییر یک متغیر کیفی، میزان تغییر متغیر دیگر در احتمالات مختلف را بررسی نمود. از جمله کاربردهای دیگر دوره بازگشت‌های شرطی می‌توان به مدیریت آلودگی در آب‌های زیرزمینی و طبیعی اشاره کرد.

$(T_{Na|Sar>sar})$ ، و در حالت دوم دوره بازگشت نسبت جذبی سدیم برای حالتی که میزان سدیم از یک حد آستانه معین تجاوز کند  $(T_{Na|Sar\geq sar})$ ، بررسی شدند. به عنوان مثال، در شکل (۷) دوره بازگشت میزان SAR برابر با ۰/۴ بشرطی که غلظت Na بیشتر از ۱/۲ میلی‌گرم در لیتر باشد، تقریباً برابر ۲۵ سال خواهد بود. دوره‌های بازگشت توأم و شرطی متغیرهای کیفی (سدیم و نسبت جذبی سدیم) اطلاعات مفیدی جهت آگاهی از میزان شوری آب و اراضی در اختیار مهندسان آب و کارشناسان کشاورزی و محیط‌زیست قرار می‌دهند تا براساس آن‌ها



شکل ۶. الف) دوره بازگشت توأم متغیرهای Na و SAR برای دو حالت (and) «و» شکل سمت راست و «or» «یا» شکل سمت چپ (ب) در چاه شماره ۵



شکل ۷. دوره بازگشت شرطی متغیر SAR به ازاء تجاوز از حدود آستانه مختلف Na در چاه شماره ۵

## نتیجه‌گیری

SAR برابر با ۰/۴ به شرطی که غلظت Na بیشتر از ۱/۲ باشد، تقریباً برابر ۲۵ سال خواهد بود (دوره بازگشت شرطی). در حالت (or) در زمانی که غلظت سدیم (Na) برابر ۰/۶ یا بیشتر و میزان نسبت جذبی سدیم (SAR) برابر با ۰/۲۵ باشد، دوره بازگشت برابر ۳ سال می‌باشد. در حالت and برای مقادیر مذکور دوره بازگشت توأم برابر ۵۰ ساله خواهد بود. اگر غلظت Na برابر ۰/۲۵ باشد، احتمال اینکه مقدار SAR برابر ۰/۲ باشد، برابر ۰/۲۸ می‌باشد. در پایان پیشنهاد می‌شود که این مطالعه در ابعاد چندمتغیره (بیش از دومتغیره) با استفاده از توابع مفصل تودرتو و توابع مفصل خانواده واین در این دشت و دشت‌های دیگر کشور توسعه داده شود.

## منابع

- نیرومند، ح و بزرگ‌نیا، س. ا (۱۳۸۲) مقدمه‌ای بر سری‌های زمانی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۳۰۴ ص.
- خانی‌تملیه، ذ. رضایی، ح. و میرعباسی نجف‌آبادی، ر (۱۳۹۹) کاربرد توابع مفصل تودرتو برای تحلیل فراوانی چهار متغیره خشکسالی‌های هواشناسی (مطالعه موردی: غرب ایران)، نشریه حفاظت منابع آب و خاک، ۱۱۰(۱)، ص ۹۳-۱۱۲.
- گنجعلی‌خانی، م.، نعمت‌کرمانی، م.، رضایپور، م. و رهنما، م. ب (۱۳۹۵) ارزیابی عملکرد تابع مفصل در پهنه‌بندی کیفی آب‌های زیرزمینی، مطالعه موردی دشت‌های کرمان و راور، نشریه تحقیقات آب و خاک ایران، ۴۷(۳)، ص ۵۶۱-۵۵۰.
- لاله‌زاری، ر.، طباطبایی، س. ح. و یارعلی، ن (۱۳۸۸) بررسی تغییرات ماهانه نیترات در آب زیرزمینی دشت شهرکرد و پهنه‌بندی با استفاده از سیستم اطلاعات جغرافیایی. مجله پژوهش‌های آب ایران، ۳(۴)، ص ۹-۱۷.
- علیزاده، ا (۱۳۹۱) اصول هیدرولوژی کاربردی، ویرایش پنجم، چاپ سی پنجم، دانشگاه امام رضا (ع)، ص ۹۲۸.
- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., and Bakken, H (2009) Pair-copula constructions of multiple dependence. Insurance: Mathematics and economics, 44 (2): 182-198.
- Abdi, A., Hassanzadeh, Y., Talatahari, S., Fakheri-Fard, A., and Mirabbasi, R (2017) Regional bivariate modeling of droughts using L-components and copulas. Stoch. Environ. Res. Risk. Assess, 1199-1210.
- Akaike, H (1974) A new look at Statistical Model Identification. IEEE Transactions on Automatic Control, 19: 716- 723.
- Atique, F., and Attoh-Okine, N (2018) Copula parameter estimation using Bayesian inference for pipe data analysis. Canadian Journal of Civil Engineering, 45(1): 61-70.

یکی از مهم‌ترین عوامل در بهره‌برداری از منابع آب زیرزمینی، کیفیت آن‌ها می‌باشد. در این پژوهش به بررسی متغیرهای کیفی آب‌های زیرزمینی (شامل، SAR، K، Mg، Na، Ca، Cl، EC، pH، TDS، SO<sub>4</sub>، HCO<sub>3</sub> و TH) با استفاده از روش تحلیل چندمتغیره مبتنی بر توابع مفصل پرداخته شد. برای این منظور، پس از بررسی ساختار همبستگی متغیرهای کیفیت آب زیرزمینی در ۲۴ چاه در دشت شهرکرد، با استفاده از توابع مفصل توزیع دومتغیره از متغیرهای کیفی ایجاد گردید. به‌منظور تحلیل دومتغیره کیفیت آب زیرزمینی، ابتدا توزیع‌های رایج در هیدرولوژی بر متغیرهای کیفی برازش داده شد که تابع توزیع مقادیر حدی تعمیم‌یافته (GEV) به‌عنوان تابع توزیع حاشیه‌ای برتر شناخته شد. سپس متغیرهای کیفی دو به دو با هم جفت شدند و برازش ده تابع مفصل مختلف (شامل، کلایتون، علی- میخائیل- حق، فارلی- گامبل- مورگن- اشترن، فرانک، گالامبوس، گامبل- هوگارد، پلاکت، فیلیپ- گامبل، جو و گامبل- بارنت) بر آنها ارزیابی شد. نتایج آزمون‌های نکوئی برازش نشان داد که تابع مفصل جو در اغلب چاه‌های مورد مطالعه بهترین برازش را بر داده‌های مشاهداتی دارد. توابع مفصل کلایتون، فارلی- گامبل- مورگن اشترن نیز در رتبه‌های بعدی قرار دارند. پس از تعیین تابع مفصل برتر، احتمالات توأم و شرطی و همچنین دوره‌های بازگشت توأم (در دو حالت And و OR) و شرطی برای متغیرهای کیفی محاسبه و به‌صورت نمودار ارائه گردید. نتایج حاصل از محاسبه احتمال شرطی نشان داد که با افزایش مقدار دو به دو متغیرهای کیفی (SAR، Na، EC، TDS، Mg، TH) و ... میزان احتمال شرطی آن‌ها افزایش می‌یابد که این موضوع از لحاظ ریاضی قابل تأیید می‌باشد، بطوریکه چنانچه در دشت مورد مطالعه از عواملی که باعث بالا رفتن غلظت سدیم، کلسیم، منیزیم و سایر متغیرهای کیفی می‌شود، در فاصله زمانی طولانی استفاده شود باعث کیفیت نامرغوب آب و به دنبال آن شور شدن اراضی می‌شود (بالا بودن میزان سدیم و نسبت سدیم جذبی). بر اساس نتایج بدست آمده برای منطقه مورد مطالعه، چنانچه پروتکل‌های زیست‌محیطی، استفاده از کودها و سموم کشاورزی و سایر عوامل آلاینده آب مدیریت نشود، احتمال آلوده شدن آب‌های منطقه وجود دارد. بر اساس نتایج به دست آمده از تحقیق دوره بازگشت میزان

- Overdrafted Aquifers by Hamid Sanginabadi, Bahram Saghafian, and Majid Delavar. *Journal of Hydrologic Engineering*, 25(2): 07019005.
- Mirabbasi, R., Fakhri-Fard, A. and Dinpashoh, Y (2012) Bivariate drought frequency analysis using the Copula method. *Theoretical and Applied Climatology*, 108: 191–206.
- Nash, J. E. and Sutcliffe, J. V (1970) River flow forecasting through conceptual models. A discussion of principles, *Journal of Hydrology*, 10: 282–290.
- Nelsen, R. B (2006) *An Introduction to Copulas*, Springer, New York. 269 pp.
- Omidi, M. and Mohammadzadeh, M (2018) Spatial Interpolation Using Copula for non-Gaussian Modeling of Rainfall Data. *Journal of The Iranian Statistical Society*, 17(2): 165-179.
- Requena, A. I., Mediero, L. and Garrote, L (2013) A bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: accounting for reservoir routing in risk estimation. *J. Hydrol. Earth Syst. Sci*, 17: 3023–3038.
- Saghafian, B. and Sanginabadi, H (2020) Multivariate groundwater drought analysis using copulas. *Hydrology Research*, 51(4): 666-685.
- Schwarz, G (1978) Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2):461-464
- Shiau, J. T (2006) Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water Resources Management*, 20: 795–815.
- Silva, M. I., Gonçalves, A. M. L., Lopes, W. A., Lima, M. T. V., Costa, C. T. F., Paris, M. and De Paula Filho, F. J (2021) Assessment of groundwater quality in a Brazilian semiarid basin using an integration of GIS, water quality index and multivariate statistical techniques. *Journal of Hydrology*, 598: 126346.
- Sklar, M (1959) Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8: 229-231.
- Wang, F., Wang, Z., Yang, H., Di, D., Zhao, Y., Liang, Q. and Hussain, Z (2020) Comprehensive evaluation of hydrological drought and its relationships with meteorological drought in the Yellow River basin, China. *Journal of Hydrology*, 584, 12475.
- Ayantobo, O. O., Li, Y. and Song, S (2018) Copula-based trivariate drought frequency analysis approach in seven climatic sub-regions of mainland China over 1961–2013. *Theoretical and Applied Climatology*, 137(3): 2217-2237.
- Ayantobo, O. O., Li, Y. and Song, S (2019) Multivariate Drought Frequency Analysis using Four-Variate Symmetric and Asymmetric Archimedean Copula Functions. *Water Resources Management*, 33: 103–127.
- Bárdoss, A. and Hörning, S (2016) Gaussian and non Gaussian inverse modeling of groundwater flow using copulas and random mixing. *Water Resources Research*, 52(6): 4504-4526.
- Bárdossy, A (2006) Copula-based geostatistical models for groundwater quality parameters. *Journal of Water Resources Research*, 42(11): 1-12.
- Bárdossy, A (2011) Interpolation of groundwater quality parameters with some values below the detection limit. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15(9): 2763-2775.
- Bárdossy, A. and Li, J (2008) Geostatistical interpolation using copulas. *Water Resources Research*, 44(7).
- Chai, Y. Xiao, C. Li. M. and Liang, X (2020) Hydrogeochemical Characteristics and Groundwater Quality Evaluation Based on Multivariate Statistical Analysis. *Water*, 12(10): 2792.
- Chen, S., Tang, Z., Wang, J., Wu, J., Yang, C., Kang, W. and Huang, X (2020) Multivariate analysis and geochemical signatures of shallow groundwater in the main urban area of Chongqing, southwestern China. *Water*, 12(10): 2833.
- De Michele, C. and Salvadori, G (2003) A generalized Pareto intensity-duration model of storm rainfall exploiting 2-copulas, *Journal of Geophysical Research*, 108(D2): 4067.
- Fang, Y., Zheng, T., Zheng, X., Peng, H., Wang, H., Xin, J. and Zhang, B (2020) Assessment of the hydrodynamics role for groundwater quality using an integration of GIS, water quality index and multivariate statistical techniques. *Journal of Environmental Management*, 273, 111185.
- Genest, C. and Rivest, L. P (1993) Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88 (423): 1034–1043.
- Gräler, B. and Pebesma, E (2011) The pair-copula construction for spatial data: a new approach to model spatial dependency. *Procedia Environmental Sciences*, 7(1): 206-211.
- Joe, H (1997) *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: Chapman & Hall. 399 pp.
- Lalehzari, R. and Tabatabaei, S. H (2020) Discussion of Coupled Groundwater Drought and Water Scarcity Index for Intensively

## Multivariate analysis of groundwater quality using Archimedean Copula functions (Case study: Shahrekord aquifer)

V. Birjandi<sup>1</sup>, S. H. Tabatabaei<sup>\*1,2</sup>, R. Mastori<sup>1</sup>, H. Mazaheri<sup>3</sup> and R. Mirabbasi Najafabadi<sup>2</sup>

1- Dept., of Civil Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran

2- Dept., of Water Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

3- Dept., of Chemical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran

\* tabatabaei@sku.ac.ir

Received: 2021/9/17 Accepted: 2021/12/31

### Abstract

So far, various studies on the analysis of water quality parameters have been evaluated, but less multivariate analysis of quality parameters has been done. Therefore, in this study, a new approach has been proposed to multivariate analysis of water quality parameters using Copula functions. Since water quality data is skewed and the assumption of normality is not observed in the data distribution, so using the Archimedean Copula functions in this study for quality parameters (Sar, K, Mg, Na, Ca, Cl, Ec, Ph, Tds, So<sub>4</sub> and Th, Hco<sub>3</sub>.) can be overcome by topic. For this purpose, qualitative data of 24 observation wells in Shahrekord plain were used. Then, by Coupling (pairing) the water quality parameters and determining the superior distribution, ten Copula functions were fitted on them. The results of fitting the distributions showed that the GEV (Generalized Extreme Value) distribution function is the best distribution function over the qualitative parameters and also the results of determining the copula functions showed that in the first stage the Copula search function as a function The best Copula was identified over the qualitative parameters, and then the functions of Clayton and Farley Gamble Morgan Stern were next. The results of fitting correlation analysis showed that the highest correlation based on Pearson, Spearman and Kendal correlation coefficients is related to the parameters (Sar, Na) and (Ec, Tds) with a correlation coefficient more than 0.9. so that the results of the criteria goodness of fit for them (Root Mean Square Error (RMSE), Nash Sutcliffe Efficiency coefficient (NSE), Akaike Information Criterion (AIC), and Bayesian Information Criterion (BIC)) was respectively RMSE = 0.031, 0.036, NSE = -0.0271, -0.0351, AIC = 66,65.5 and BIC = -6.4, -6.9 Awareness of qualitative pollution of groundwater resources is one of the benefits of using multivariate analysis methods in groundwater quality studies.

**Keywords:** Groundwater, Archimedean Copula Functions, Water Quality, Return period